

1. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время  $t$  падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле  $h = 5t^2$ , где  $h$  — расстояние в метрах,  $t$  — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

2. Зависимость объема спроса  $q$  (единиц в месяц) на продукцию предприятия — монополиста от цены  $p$  (тыс. руб.) задается формулой  $q = 100 - 10p$ . Выручка предприятия за месяц  $r$  (в тыс. руб.) вычисляется по формуле  $r(p) = q \cdot p$ . Определите наибольшую цену  $p$ , при которой месячная выручка  $r(p)$  составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

3. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону  $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$ , где  $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

4. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна  $P = m \left( \frac{v^2}{L} - g \right)$ , где  $m$  — масса воды в килограммах,  $v$  — скорость движения ведерка в м/с,  $L$  — длина веревки в метрах,  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

5. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$ , где  $t$  — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана,  $H_0 = 20$  — начальная высота столба воды,  $k = \frac{1}{50}$  — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

6. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = at^2 + bt + H_0$ , где  $H_0 = 4$  — начальный уровень воды,  $a = \frac{1}{100} \text{ м/мин}^2$  и  $b = -\frac{2}{5} \text{ м/мин}$  — постоянные,  $t$  — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

7. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту.

Траектория полета камня описывается формулой  $y = ax^2 + bx$ , где  $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$ ,  $b = 1$  — постоянные параметры,  $x^{(м)}$  — смещение камня по горизонтали,  $y^{(м)}$  — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

8. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1400 \text{ К}$ ,  $a = -10 \text{ К/мин}^2$ ,  $b = 200 \text{ К/мин}$ . Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

9. Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону  $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$ , где  $t$  — время в минутах,  $\omega = 20^\circ/\text{мин}$  — начальная угловая скорость вращения катушки, а  $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$  — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки  $\varphi$  достигнет  $1200^\circ$ . Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

10. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью  $v_0 = 57 \text{ км/ч}$ , выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 12 \text{ км/ч}^2$ . Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением  $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 30 км от города. Ответ выразите в минутах.

11. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ , начал торможение с постоянным ускорением  $a = 5 \text{ м/с}^2$ . За  $t$  секунд после начала торможения он прошёл путь  $S = v_0t - \frac{at^2}{2}$  (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

12. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой  $m = 8$  кг и радиуса  $R = 10$  см, и двух боковых с массами  $M = 1$  кг и с радиусами  $R + h$ . При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в  $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ , дается формулой  $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$ . При каком максимальном значении  $h$  момент инерции катушки не превышает предельного значения  $625 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ ? Ответ выразите в сантиметрах.

13. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле:  $F_A = \rho g l^3$ , где  $l$  — длина ребра куба в метрах,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  — плотность воды, а  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 9,8 \text{ Н/кг}$ ). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем  $78400 \text{ Н}$ ? Ответ выразите в метрах.

14. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле:  $F_A = \alpha \rho g r^3$ , где  $\alpha = 4,2$  — постоянная,  $r$  — радиус аппарата в метрах,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  — плотность воды, а  $g$  — ускорение свободного падения (считайте  $g = 10 \text{ Н/кг}$ ). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем  $336\,000 \text{ Н}$ ? Ответ выразите в метрах.

15. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела  $P$ , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры:  $P = \sigma S T^4$ , где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  — постоянная, площадь  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь  $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$ , а излучаемая ею мощность  $P$  не менее  $9,12 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$ . Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

16. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной  $l$  км с постоянным ускорением  $a \text{ км/ч}^2$ , вычисляется по формуле  $v^2 = 2la$ . Определите, с какой наименьшей скоростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 1 километра от старта, если по конструктивным особенностям автомобиля приобретаемое им ускорение не меньше  $5000 \text{ км/ч}^2$ . Ответ выразите в км/ч.

17. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось  $Oy$  направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось  $Ox$  направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение  $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$ , где  $x$  и  $y$  измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

